



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General Part-I Examination, 2021

MATHEMATICS

PAPER: MTMG-I

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 50

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।*

All symbols are of usual significance.

GROUP-A

বিভাগ-ক

Answer question no. 1 and any one from rest

১ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Answer any **one** question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(i) Find the smallest positive integer 'n' if $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$.

n-এর সর্বনিম্ন ধনাত্মক মান নির্ণয় করো, যদি $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ হয়।

(ii) Find the polynomial whose zeros are 1, -2, 3.

পলিনোমিয়ালটি নির্ণয় করো যার zeros গুলি হলো 1, -2, 3.

(iii) Show that rank of a skew symmetric matrix cannot be 1.

দেখাও যে skew symmetric matrix-এর rank 1 হতে পারে না।

(b) Answer any **one** question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(i) If α, β are the roots of the equation $x^2 - 2x + 1 = 0$, find the equation whose roots are α^n, β^n .

α, β যদি $x^2 - 2x + 1 = 0$ -এর দুটি বীজ হয় তবে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজদ্বয় α^n, β^n .

(ii) If α, β, γ be the roots of the equation $x^2 + x + 1 = 0$, then find the value of $(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)(1 + \gamma^2)$.

α, β, γ যদি $x^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় হয় তবে $(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)(1 + \gamma^2)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(iii) Find the value of any third order skew-symmetric determinant.

যে-কোনো তিন order, skew-symmetric determinant-এর মান নির্ণয় করো।

2. (a) If $u + iv = \tan(x + iy)$, then show that $u^2 + v^2 + 2u \cot 2x = 1$. 5

যদি $u + iv = \tan(x + iy)$, তাহলে প্রমাণ করো $u^2 + v^2 + 2u \cot 2x = 1$.

(b) Prove that the sum of the 99th powers of the roots of the equation $x^7 - 1 = 0$ is zero. 5

দেখাও যে $x^7 - 1 = 0$ সমাকরণটির বীজগুলির 99-তম ঘাতের যোগফল হলো শূন্য।

3. (a) Solve $x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0$, by removing the second term. 5

দ্বিতীয় পদটি Remove করে সমাধান করো: $x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0$.

(b) Solve by Cardan's method : $x^3 - 12x + 65 = 0$. 5

কার্ডানের পদ্ধতিতে সমাধান করো: $x^3 - 12x + 65 = 0$.

4. (a) Find the value of / নিম্নলিখিত determinant-এর মান নির্ণয় করো -

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}.$$

5

(b) (i) Show that product of two orthogonal matrices is orthogonal. 2

দেখাও যে, দুটি orthogonal ম্যাট্রিক্সের গুণফল হলো একটি orthogonal ম্যাট্রিক্স।

(ii) If \mathbf{A} be a skew symmetric matrix of order n and \mathbf{P} be a $n \times 1$ matrix, prove that $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{0}$. 3

যদি \mathbf{A} একটি n - order-এর skew symmetric matrix এবং \mathbf{P} একটি $n \times 1$ ম্যাট্রিক্স হয় তবে প্রমাণ করো $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{0}$.

5. (a) Find \mathbf{X} from the matrix equation $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$, where $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. 5

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ হইতে } \mathbf{X} \text{-এর মান নির্ণয় করো যেখানে } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ এবং } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) If A is orthogonal and $\det(I + A) \neq 0$, prove that $(I + A)^{-1}(I + A)$ is skew symmetric. 5

যদি A একটি orthogonal matrix এবং $\det(I + A) \neq 0$ হয়, তবে প্রমাণ করো $(I + A)^{-1}(I + A)$ একটি skew symmetric matrix.

GROUP-B

বিভাগ-খ

Answer any *one* question from the question no. 6 to 10

৬ নং থেকে ১০ নং প্রশ্নের মধ্যে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any *two* questions from the following: 3×2 = 6

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) If the expression $ax + by$ changes to $a'x' + b'y'$ by a rotation of rectangular axes about the origin, then prove that $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.যদি মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের ফলে $ax + by$ রাশিটি $a'x' + b'y'$ হয় তবে প্রমাণ করো $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$.(b) Find the point of intersection of the conics $\frac{1}{r} = 1 + \cos \theta$ and $\frac{3}{r} = 1 - \cos \theta$.নিম্নলিখিত কনিকদুটির ছেদবিন্দু নির্ণয় করো $\frac{1}{r} = 1 + \cos \theta$, $\frac{3}{r} = 1 - \cos \theta$.(c) If the ratio of the gradients of the straight lines represented by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is 2:3, then show that $24h^2 = 25ab$. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদুটির প্রবণতার অনুপাত 2:3 হলে প্রমাণ করো, $24h^2 = 25ab$.7. If PSP' is a focal chord of a conic, then show that the angle between the tangents 6at P and P' is $\tan^{-1} \frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2}$, where α is the angle between the focal chord and major axis of the conic.যদি কোনো কনিকের PSP' একটি নাভিগামী কোন জ্যা হয় তবে প্রমাণ করো P ও P' বিন্দুতে স্পর্শকের মধ্যে কোণটি হবে $\tan^{-1} \frac{2e \sin \alpha}{1 - e^2}$, যেখানে α হলো নাভিগামী জ্যা ও প্রধান অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ।8. Reduce the equation $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + a = 0$ to its canonical form and 6
determine the nature of the locus for different values of a .'a'-এর বিভিন্ন মানের জন্যে, $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + a = 0$, কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করো।9. Prove that the equation of the straight lines through the origin each of which 6
makes an angle α with the straight line $y = x$ is $x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$.দেখাও যে মূলবিন্দুগামী সরলরেখাদ্বয় যারা $y = x$ এর সঙ্গে α কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমীকরণ হলো, $x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$.10. Show that locus of poles of tangents to the parabola $ay^2 + 2b^2x = 0$ with respect 6
to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is the parabola $ay^2 - 2b^2x = 0$.দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সাপেক্ষে $ay^2 + 2b^2x = 0$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের পোলের সমষ্টিপথটি হলো $ay^2 - 2b^2x = 0$ অধিবৃত্তটি।

GROUP-C

বিভাগ-গ

11. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Show that in a triangle ABC , $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$, where M is the midpoint of BC .

যে-কোনো ত্রিভুজ ABC -এর জন্যে দেখাও যে $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ হবে, যেখানে M হলো BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

(b) Find the work done by the force $\vec{F} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ whose point of application is given a displacement from the point $A(2, -1, -2)$ to the point $B(-1, 2, 3)$.

$\vec{F} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ বলটি দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাপ নির্ণয় করো যার প্রয়োগবিন্দুর সরণ $A(2, -1, -2)$ থেকে $B(-1, 2, 3)$ বিন্দুতে হয়।

(c) Determine a unit vector perpendicular to the plane of $\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{\beta} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$.

যে তলে $\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ অবস্থিত সেই তলের লম্ব বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

12. Answer any **one** question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Find the value of $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ where $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ and $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ রাশিটির মান নির্ণয় করো, যেখানে $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ এবং $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$.

(b) Given two vectors $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$; express $\vec{\beta}$ in the form $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$, where $\vec{\beta}_1$ is parallel to $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}_2$ is perpendicular to $\vec{\alpha}$.

$\vec{\beta}$ -কে $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ আকারে প্রকাশ করো, যেখানে $\vec{\beta}_1$ হলো $\vec{\alpha}$ -এর সমান্তরাল এবং $\vec{\beta}_2$ হলো $\vec{\alpha}$ -এর উপর লম্ব, দেওয়া আছে $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$.

(c) Prove that / প্রমাণ করো যে –

$$\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}.$$

(d) Find the vector equation of the line joining the points $(2, -3, -1)$ and $(8, -1, 2)$.

$(2, -3, -1)$ এবং $(8, -1, 2)$ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(e) In a triangle ABC prove that, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, by vector method.

ভেক্টর নিয়মে দেখাও যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

GROUP-D

বিভাগ-ঘ

Answer question no. 13 and any *one* from rest

১৩ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও

13.(a) Answer any *one* question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(i) Solve the inequalities and represent the solution sets on the number line
 $|2x-3| \geq 1$.

নিম্নলিখিত অসমীকরণটি সমাধান করে সমাধান অঞ্চলটি নির্ণয় করো –

$$|2x-3| \geq 1.$$

(ii) If $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for all x , then prove that f is an odd function.যদি $f(x+y) = f(x) + f(y)$ হয় সমস্ত x -এর জন্যে, তবে প্রমাণ করো যে f -একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।(iii) Show that the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$ has one root between 1 and 2.দেখাও যে, $x^3 - 3x + 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ 1 ও 2-এর মধ্যে অবস্থিত।(b) Answer any *one* question from the following: 2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(i) If $y = \frac{x}{x+1}$, then show that $y_5(0) = 5!$.যদি $y = \frac{x}{x+1}$ হয় তবে প্রমাণ করো যে $y_5(0) = 5!$.(ii) If $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \sin^{-1} \frac{x}{y}$ then find the value of $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ at the point (1, 1).যদি $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \sin^{-1} \frac{x}{y}$ হয় তবে $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ -এর মান নির্ণয় করো (1, 1) বিন্দুতে।(iii) Find the points on the curve $y = x^2 - 4x + 9$ the tangents at which passes through the origin. $y = x^2 - 4x + 9$ বক্ররেখাটির উপর সেই বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যেখানে স্পর্শক মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।14.(a) Prove that the curves $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ will cut orthogonally, if $a - b = A - B$. 5দেখাও যে বক্ররেখাদ্বয়, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$ পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করবে যদি $a - b = A - B$ হয়।

(b) What do you mean by $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$. Show that $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ does not exist. 2+3

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ মানে যাহা জান লেখো। দেখাও যে, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

15.(a) If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, then show that $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$. 5

যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ হয় তবে প্রমাণ করো যে $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ হবে।

(b) Find the pedal equation of $r = a(1 + \cos \theta)$. 5

$r = a(1 + \cos \theta)$ -এর pedal সমীকরণটি নির্ণয় করো।

16.(a) Find the curvature of $y = x e^{-x}$ at its maximum point. 5

$y = x e^{-x}$ বক্ররেখাটির সর্বোচ্চ বিন্দুতে বক্রতা নির্ণয় করো।

(b) If $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, then find the value of $\frac{dz}{dt}$ at $t = \frac{\pi}{2}$. 5

যদি $z = e^{xy^2}$, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ হয়, তবে $\frac{dz}{dt}$ এর মান $t = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে নির্ণয় করো।

17.(a) Define continuity of a function $f(x, y)$ at a point (a, b) . Show that 5

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0, \quad (x, y) = (0, 0)$$

is continuous at $(0, 0)$.

যে-কোনো অপেক্ষক $f(x, y)$ এর (a, b) বিন্দুতে সন্ততর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে,

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0, \quad (x, y) = (0, 0)$$

$(0, 0)$ বিন্দুতে সন্তত।

(b) If $f(x, y) = xy$ if $|x| \geq |y|$
 $= -xy$ if $|x| < |y|$ 5

Then show that $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

$$\text{যদি, } f(x, y) = xy \quad \text{if } |x| \geq |y|$$

$$= -xy \quad \text{if } |x| < |y|$$

হয় তবে প্রমাণ করো যে, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

GROUP-E

বিভাগ-ঙ

18. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate: / মান নির্ণয় করো:

$$\int \frac{(x^3 - x)^{1/3} dx}{x^4}$$

(b) For $x \geq 1$, find $\int_0^{2[x]} (x - [x]) dx$, where $[x]$ denotes the greatest integer not greater than x .

$x \geq 1$ হলে $\int_0^{2[x]} (x - [x]) dx$ নির্ণয় করো, যেখানে $[x]$ হলো x অপেক্ষা বড় নয় এমন সর্বোচ্চ পূর্ণসংখ্যা।

(c) The value of $\int_{-2}^2 (ax^3 + bx + c) dx$ depends on (Fill in the blank)

$\int_{-2}^2 (ax^3 + bx + c) dx$ -এর মানের উপর নির্ভরশীল শূণ্যস্থান পূর্ণ করো।

19. Answer any **one** question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate: / মান নির্ণয় করো:

$$\int x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

(b) Evaluate: / মান নির্ণয় করো:

$$\left\{ \left(1 + \frac{1^2}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{n^2}{n^2} \right) \right\}^{1/n}$$

(c) Evaluate: / মান নির্ণয় করো:

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{3/2} dx$$

(d) Evaluate: / মান নির্ণয় করো:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

GROUP-F

বিভাগ-চ

20. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Find the order and degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y = 2$.

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y = 2$ অন্তরকল সমীকরণটির ক্রম এবং ডিগ্রী নির্ণয় করো।

- (b) Find the differential equation of the curve $y = A \cos 2x + B \sin 2x$, where A, B are parameters.

A ও B প্রচলদ্বয়ের জন্য $y = A \cos 2x + B \sin 2x$ বক্ররেখাটির অন্তরকল সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (c) Find the integrating factor of $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$.

$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ -এর জন্য সমাকল গুণকটি নির্ণয় করো।

21. Answer any **one** question from the following:

4×1 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোনো **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

- (a) Solve: / সমাধান করোঃ

$$x dy - y dx - \cos \frac{1}{x} dx = 0$$

- (b) Solve: / সমাধান করোঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

- (c) Solve: / সমাধান করোঃ

$$y(1 + xy) dx + x(1 - xy) dy = 0$$

- (d) Obtain general and singular solution of $y = px + \sqrt{4p^2 + 9}$ where $p = \frac{dy}{dx}$.

$y = px + \sqrt{4p^2 + 9}$ (যেখানে $p = \frac{dy}{dx}$) অন্তরকল সমীকরণটির সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করো।

N.B. : Students have to complete submission of their Answer Scripts through E-mail / Whatsapp to their own respective colleges on the same day / date of examination within 1 hour after end of exam. University / College authorities will not be held responsible for wrong submission (at in proper address). Students are strongly advised not to submit multiple copies of the same answer script.

—x—